Domácí úkol ze cvičení 12.

Pokud jste ještě nezkoušeli „řetízkové“ pravidlo nebo jste zjistili na cvičení, že Vaše řešení nebylo správné, zkuste aspoň tyto příklady z dú 11:

Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g, je-li

(i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = F(x,y,\varphi(x,y))$

(Předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla - jaké to jsou předpoklady?)

A příprava na příští cvičení :

Zkuste, zda byste vyřešili něco z následujících příkladů (viz věta o implicitní funkci z přednášky) a připravte si, prosím, případné dotazy :

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.

   Pak a) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;

   b) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) ;

   c) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:

   i) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$

   ii) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3$, $(x_0,y_0)=(1,2)$

   iii) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

2. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$

   je definována implicitně v okolí bodu $(-2,0,1)$ funkce $z=f(x,y), f\in C^2(U(-2,0))$.

   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.

   c) Nabývá funkce $z=f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

3. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.

   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí

   $$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0 \quad .$$

4. Ukažte, že soustavou rovnic

   $$x^2+y^2=z$$
   $$x+y+z=2 \qquad (*)$$

   jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ definovány implicitně funkce $y=f(x)$, $z=g(x)$.

   Určete $f'(-1)$ a $g'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*), v bodě $(-1,1,2)$.

A zkuste promyslet také příklady na hledání extrémů (a užití věty o Lagrangeových multiplikátorech) :

Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M, je-li:

a) $f(x,y)=x^2+2y^2$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^4+y^4=1\}$

b) $f(x,y,z)=x+y+z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3; x^2+y^2\le z<1\}$

c) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$

d) $f(x,y,z)=xy+z^2$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1 \wedge x\ge 0\}$;